УДК 621.3.011.7

В. А. Федорчук*, д-р техн. наук,
К. М. Ключка,** канд. техн. наук,
С. Ю. Протасов,** канд. техн. наук

*Кам’янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам’янець-Подільський,
**Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ НА ОСНОВІ ІНТЕГРАЛЬНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ

В статті розглянуто питання аналізу стійкості режиму роботи електричних кіл на основі використання їх інтегральних динамічних моделей.

Ключові слова: *електричні кола, стійкість режиму роботи, інтегральне рівняння Вольтерри.*

Вступ. На сучасному етапі розвитку електроенергетичних систем з’явились нові задачі, які викликані появою імпульсних перетворювачів великої потужності та широким використанням в електроенергетичних системах комп’ютерних засобів. Специфіка нових задач полягає в тому, що приходиться мати справу не лише з неперервними сигналами, але й з імпульсними, які описуються функціями, що мають розриви першого роду. В цьому випадку традиційні методи дослідження сучасних електроенергетичних систем, а саме систем з імпульсними елементами, у багатьох випадках є не зовсім пристосованими, а інколи просто непридатними для практичного використання.

З математичного погляду дослідження стійкості режиму електричного кола зводиться до оцінки стійкості розв'язань диференціальних рівнянь його стану при відповідних збуреннях, що в найзагальнішому вигляді можна здійснити шляхом інтегрування таких рівнянь за умови забезпечення чисельної стійкості інтегрування.

Постановка проблеми. Стійкість стану рівноваги електричних кіл у загальному випадку, зазвичай, оцінюють на основі методів Ляпунова [1], суть яких полягає у дослідженні стійкості розв'язання диференціальних рівнянь стану цих кіл.

Оцінку стійкості стану рівноваги електричного кола (оцінку статичної стійкості) в загальному випадку можна здійснити шляхом розв'язування характеристичного рівняння лінеаризованої системи диференціальних рівнянь. Числові значення коренів характеристичного рівняння показують ступінь стійкості стану системи (величини дійсних складових коренів) і характер перехідних процесів при збуреннях відносно їх нормального стану (аперіодичний чи коливальний). Цей метод оцінки стійкості слід вважати особливо перспективним у зв'язку з швидким удосконаленням комп’ютерних засобів моделювання, на базі яких реалізують алгоритм числових методів розв'язування рівнянь.

Складність безпосереднього обчислення коренів характеристичних рівнянь зумовила створення спеціальних методів оцінки стійкості стану рівноваги системи без прямого розв'язування характеристичного рівняння. У випадку використання таких непрямих способів оцінки характеру коренів критерії стійкості ґрунтуються на опосередкованих ознаках, необхідних і достатніх чи лише достатніх умов стійкості, які можна встановити без розв'язування характеристичного рівняння на основі наведених нижче міркувань (критерії стійкості). Метод визначення основного критерію стійкості є по суті способом обчислення коренів рівнянь (алгебраїчних чи трансцендентних) з усіма можливими труднощами розв’язування цих рівнянь.

Зокрема, причиною вказаних труднощів є те, що переважна більшість числових методів розв’язування звичайних диференціальних рівнянь не передбачає можливості використання сигналів без умови їх неперервної диференційовності. Отже, подальший розвиток методів дослідження електричних кіл можливий при залученні інших підходів до побудови їх математичних моделей, а саме використання *апарату інтегральних рівнянь* [2—4]. Оскільки на даний час для дослідження стійкості систем розроблено теоретичні основи лише для математичних моделей, поданих у диференціальній формі, природнім чином виникає задача дослідження стійкості електричних кіл за їх інтегральними моделями.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо лінійне неперервне електричне коло, процеси в якому описуються багатовимірним лінійним інтегральним рівнянням Вольтерри II роду

$$\dot{k}(t)\dot{y}(t)+\int_{t_0}^{t}\dot{K}(t,\tau)\dot{y}(\tau)d\tau=\dot{l}(t)\dot{x}(t)+\int_{t_0}^{t}\dot{L}(t,\tau)\dot{x}(\tau)d\tau+\dot{f}(t,t_0), \qquad (1)$$

де $\dot{y}(t)=(y^1(t),y^2(t),...,y^n(t))^T$ — n-вимірний вектор сигналів-відгуків (струмів, напруг) кола; $\dot{x}(t)=(x^1(t),x^2(t),...,x^m(t))^T$ — m-вимірний вектор вхідних сигналів (струмів, напруг);

$$\dot{K}(t,\tau)=K_{i,j}(t,\tau)\,,\ i=\overline{1,n}\,,\ j=\overline{1,n}\,;$$

$$\dot{L}(t,\tau)=L_{i,j}(t,\tau)\,,\ i=\overline{1,n}\,,\ j=\overline{1,m}\,;$$

$\dot{K}(t,\tau)$, $\dot{L}(t,\tau)$ — ядра інтегральних операторів Вольтерри, що відображають динамічні характеристики електричного кола;

$$\dot{k}(t,\tau)=k_{i,j}(t,\tau)\,,\ i=\overline{1,n}\,,\ j=\overline{1,n}\,;$$

$$\dot{l}(t,\tau)=l_{i,j}(t,\tau)\,,\ i=\overline{1,n}\,,\ j=\overline{1,m}\,;$$

$\dot{k}(t,\tau)$, $\dot{l}(t,\tau)$ — змінні матриці, причому, якщо не зазначено додатково, матриця $\dot{k}(t,\tau)$ вважається рівною одиничній матриці I ; t_0 — момент початку функціонування кола (подачі вхідного сигналу); t — поточний момент часу; $f(t,t_0) = \ = (f^1(t,t_0), f^2(t,t_0),..., f^1(t,t_0))^T$ — вільний член, що містить всю інформацію, необхідну для однозначного знаходження $y(t)$ для всіх $t \geq t_0$.

Будемо вважати, що елементи матриць і векторів є достатньо гладкими функціями часу для того, щоб всі перетворення були правомірні (зокрема, щоб рівняння (1) мало єдиний розв'язок $y(t)$).

Рівняння (1) описує лінійну систему і має властивість лінійної залежності розв'язку від правої частини рівняння і, отже, від вхідного впливу. Вираз (1) описує систему, що фізично реалізується, так як значення вихідного сигналу в момент t обумовлюється лише значеннями вхідного впливу в цей і в попередній моменти і не залежить від наступних змін сигналу $x(t)$.

Розглянемо інтегральну модель (1), приймаючи $k(t) \equiv I$:

$$y(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau) y(\tau) d\tau = g(t) , \qquad (2)$$

де I — одинична матриця,

$$g(t) = l(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} L(t,\tau)x(\tau)d\tau + f(t,t_0) .$$

За допомогою резольvenти розв'язок інтегрального рівняння (2) записується у такий спосіб [2]

$$y(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} R(t,\tau) g(\tau) d\tau .$$

Якщо підставити в отримане рівняння вираз для функції $g(t)$, після еквівалентних перетворень знаходимо

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) , \qquad (3)$$

де

$$y_1(t) = \int_{t_0}^{t} w(t,\tau)x(\tau)d\tau ; \qquad (4)$$

$$y_2(t) = \int_{t_0}^{t} w_f(t,\tau) f(\tau,t_0) d\tau ; \qquad (5)$$

$$w(t,\tau) = l(t)\delta(t-\tau) + L(t,\tau) + R(t,\tau)l(\tau) + \int_{t_0}^{t} R(t,u)L(t,\tau)du ; \qquad (6)$$

$$w_f(t,\tau)=\delta(t-\tau)+R(t,\tau)\ ; \tag{7}$$

$\delta(t)$ — одинична імпульсна функція.

Розв'язок рівняння (1) згідно формули (3) складається із двох складових

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)\ ,$$

де $y_1(t)$ — вимушені коливання на виході системи, які викликані вхідним впливом і визначаються за формулою (4); $y_2(t)$ — вільні коливання, які однозначно знаходяться із виразу (5) і залежать лише від початкового запасу енергії та властивостей системи.

Будемо називати систему (1):

- стійкою (асимптотично), якщо

$$\lim_{t\to\infty} y_2(t)=0 \tag{8}$$

для довільної припустимої функції $f(t, t_0)$, яка визначається початковим запасом енергії в системі;

- нерезонансною (стійкою в смислі: обмежений вхід — обмежений вихід), якщо з обмеженості вхідного впливу $\|x\|<\infty$ випливає, що відповідна реакція системи також обмежена $\|y\|<\infty$.

З формули (5) для функції $y_2(t)$ випливає, що властивість стійкості, в основному, залежить від виду резольвентного ядра $R(t, \tau)$ і, в деякій мірі, від структури вільного члена $f(t, t_0)$. Остання особливість характерна для лінійних систем з невиродженими ядрами, рівняння яких не можуть бути зведені до диференціальних рівнянь. Отже, стійкість системи, головним чином, визначається властивостями ядра $K(t, \tau)$, що значною мірою аналогічно традиційному випадку, коли стійкість взаємно однозначно пов'язана з розташуванням полюсів передатної функції. Крім того, можна довести наступне твердження: якщо знайдеться такий момент часу $t_1<\infty$, що для всіх $\tau\in[t_1, t]$ функція $K(t, \tau)$ задовольняє умовам

$$\left.\begin{aligned} &K(t,\tau)\le 0 \qquad \text{при} \qquad t\ge t_1,\\ &\lim_{t\to\infty} K(t,\tau)<0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

а функція $f(t, t_1)$ може бути вибрана від'ємною на відрізку $[t_1, \infty)$ і додатною на деякій множині ненульової міри, то система (1) нестійка.

Оскільки $f(t_1, t_1) > 0$, $f(t, t_1)\ge 0$ і неперервна, а ядро $K(t, \tau)$ сумовне по τ на відрізку $[t_1, t]$.

Тоді, приймаючи у рівнянні (1) відповідно принципу суперпозиції $x(t)\equiv 0$, знаходимо

$$y_2(t_1)=f(t_1,t_1)>0,\quad y_2(t)=f(t,t_1)-\int_{t_1}^{t}K(t,\tau)\,y_2(\tau)\,d\tau\ge 0$$

для всіх $t \geq t_1$, оскільки — $K(t, \tau) \geq 0$. Крім того, з виразів (9) випливає, що $\lim\limits_{t \to \infty} y_2(t) > 0$, що суперечить вимозі (8). Отже, умови (9) є достатніми умовами нестійкості і у загальному випадку не можуть бути ослаблені, як показують наведені нижче приклади. Відзначимо також, що для стійкості системи необхідно, щоб порушувалась, принаймні, одна з нерівностей (9).

Приклад. Для електричної схеми, що наведена на рис. 1, розглянемо питання стійкості стану рівноваги нелінійного *RLC* кола при нелінійній залежності характеристик котушки індуктивності та резистора.

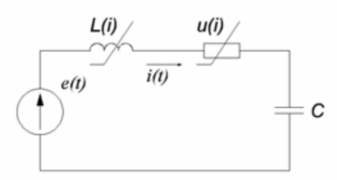

Рис. 1. *Схема нелінійного RLC кола*

Рівняння стану цього кола

$$\frac{d\psi(i)}{di}\frac{di}{dt} + u_r(i) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = e(t)\,. \tag{10}$$

Розглянемо спочатку традиційний підхід до вирішення цієї задачі на основі використання диференціальної моделі.

Лінеаризоване відповідне однорідне рівняння матиме вигляд [1]:

$$\left(\frac{d\psi(i)}{di}\right)_{i_0}\frac{d\Delta i}{dt} + \left(\frac{du(i)}{di}\right)_{i_0}\Delta i + \frac{1}{C}\int_0^t \Delta i(t)dt = 0\,. \tag{11}$$

Диференціальне однорідне рівняння запишемо у вигляді

$$\left(\frac{d\psi(i)}{di}\right)_{i_0}\frac{d^2\Delta i}{dt^2} + \left(\frac{du(i)}{di}\right)_{i_0}\frac{d\Delta i}{dt} + \frac{1}{C}\Delta i = 0\,. \tag{12}$$

Корені характеристичного рівняння, що відповідає рівнянню (13) матимуть вигляд:

$$p_1 = -\frac{r}{2L} + \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\,,\; p_2 = -\frac{r}{2L} - \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\,, \tag{13}$$

де

$$r = \left(\frac{du(i)}{di}\right)_{i_0},\; L = \left(\frac{d\psi(i)}{di}\right)_{i_0}. \tag{14}$$

Для $\psi(i)$ у вигляді основної кривої намагнічування динамічна індуктивність L завжди додатна. За цієї умови корені (13) матимуть додатну дійсну частину тільки при $r<0$. Вони можуть бути як дійсними так і комплексно-спряженими.

Отже, стан рівноваги (11) може бути нестійким тільки на падаючих ділянках вольт-амперної характеристики $u(i)$. Причому, як випливає з (12), під час коливального процесу незалежно від значення r на таких ділянках рівновага завжди нестійка. Порушення рівноваги може носити аперіодичний характер (корені дійсні) або коливальний характер (корені комплексно-спряжені).

З'ясуємо питання стійкості стану рівноваги наведеного електричного кола на основі інтегральної динамічної моделі. Спочатку шляхом інтегрування вихідного рівняння (10) отримаємо еквівалентне інтегральне рівняння у вигляді

$$\Delta i(t)+\int_0^t\left[\frac{r}{L}+\frac{1}{LC}(t-\tau)\right]\Delta i(t)d\tau=f(t), \qquad (15)$$

де $f(t)=\dfrac{1}{L}\int_0^t e(\tau)d\tau$, r і L — визначаються за виразами (14); $K(t-\tau)=\left[\dfrac{r}{L}+\dfrac{1}{LC}(t-\tau)\right]$ — ядро інтегрального рівняння.

Ядро $K(t-\tau)=\left[\dfrac{r}{L}+\dfrac{1}{LC}(t-\tau)\right]$ буде додатне для всіх $t\geq\tau$, а також $\lim\limits_{t\to\infty}K(t,\tau)\geq 0$ для будь-якого фіксованого $\tau\leq t$, тільки при $r>0$. Таким чином порушуються обидві умови нестійкості системи (9), а це означає, що стан рівноваги кола може бути нестійким тільки на падаючих ділянках вольт-амперної характеристики $u(i)$.

Висновок. В результаті проведеної роботи було отримано нові результати, які надають можливість проводити дослідження стійкості електричних кіл за їх інтегральними моделями, що дає змогу розширити клас досліджуваних електричних та електронних кіл, включаючи електричні кола з електронними імпульсними елементами.

Список використаних джерел:

1. Перхач В. С. Математичні задачі електроенергетики / В. С. Перхач. — Львов : Выща школа, 1989. — 464 с.
2. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы : справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наукова думка, 1986. — 543 с.
3. Верлань А. Ф. Метод интегральных уравнений в задаче описания и расчета электрических цепей / А. Ф. Верлань // Электронное моделирование, 1983. — № 5. — С. 8–12.

4. Ключка К. М. Методи отримання інтегральних динамічних моделей електричних кіл / К. М. Ключка // Вісник Черкаського державного технологічного університету, 2009. — №1. — С. 28–30.

The paper deals with the analysis of the stability operation of electrical circuits through the use of integrated dynamic models.

Key words: *circuits, stable operation, Volterra integral equations.*

Отримано: 12.09.2012

УДК 004.891.3

І. Є. Фільо, асистент

Національний університет водного господарства
та природокористування, м. Рівне

НЕЧІТКА ЕКСПЕРТНО-МОДЕЛЮЮЧА СИСТЕМА ЯК ЗАСІБ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ НАВЧАННЯ В СИСТЕМІ «ВИКЛАДАЧ — КОМП’ЮТЕР — СТУДЕНТ»

В статті представлені методи нечіткої прогностичної інформації, а також структура нечіткої експертно-моделюючої системи, яка забезпечує підтримку педагогічних рішень та допомагає реалізувати викладачу (ОПР) адаптивне управління процесом комп’ютеризованого дослідницького навчання для підвищення його якості.

Ключові слова: *ефективність взаємодії, система «викладач — комп’ютер — студент», комп’ютеризоване дослідницьке навчання, нечіткий логічний висновок, експертно-моделююча система.*

Постановка проблеми. Впровадження НІТН у процес управління навчанням є актуальною практикою і значно підвищує якість навчання. Суттєво реалізувати нові дидактичні можливості НІТН дозволяють інтелектуальні системи реалізовані у вигляді експертних систем. Принциповою відмінністю експертних систем є те, що такі системи вміло моделюють діяльність педагога [1]. Актуальним напрямком досліджень є розробка нечіткої експертно-моделюючої системи, яка забезпечує підтримку педагогічних рішень та допомагає реалізувати викладачу (ОПР) адаптивне управління процесом комп’ютеризованого дослідницького навчання для підвищення його якості.

Аналіз останніх досліджень. Проблема опрацювання нечіткої експертної інформації може бути вирішена за рахунок створення нечітких експертних систем прогнозування. Сучасні експертні системи прогнозування або експертні оболонки використовують різні підходи